Logika w zastosowaniach kognitywistycznych

Wprowadzenie do logiki epistemicznej. Zdaniowa logika przekonań KDE4 i jej semantyka. Część I

(notatki do wykładów)

Andrzej Wiśniewski
Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl

wersja beta 1.6

W epistemicznych rachunkach zdań (dalej krótko: *ERZ*), o których będzie mowa na tych wykładach, nie rozważa się dwuargumentowych funktorów epistemicznych typu:

- *a* <u>jest całkowicie przekonany/przekonana, że</u> ϕ - $\mathbf{C}(a, \phi)$,
- *a* <u>jest przekonany/ przekonana, że</u> ϕ - $\mathbf{B}(a, \phi)$,
- *a* <u>wie, że</u> *p* - $\mathbf{K}(a, \phi)$,
- ....

lecz ich jednoargumentowe odpowiedniki: $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$, ...

Znaczy to, że charakteryzujemy odpowiednie nastawienia sądzeniowe (*propositional attitudes*) niejako *in abstracto* i/lub charakteryzujemy pewnego rodzaju idealny/wyidealizowany podmiot epistemiczny.

Przypomnijmy:

Aletyczne modalne rachunki zdań (dalej krótko: modalne rachunki zdań, jeszcze krócej: *MRZ*) budujemy w języku, który jest rozszerzeniem języka Klasycznego Rachunku Zdań.

Do alfabetu *KRZ* dodajemy dwa nowe spójniki/operatory modalne:

$\Box$ („*jest konieczne, że*")

$\Diamond$ („*jest możliwe, że*")

otrzymując w ten sposób alfabet języka *MRZ*.

W przypadku *ERZ* jest podobnie, z tym, że do alfabetu *KRZ* zamiast modalności aletycznych dołączamy rozważane (w danym rachunku) modalności epistemiczne.

Przypomnijmy:

(*i*) *Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka MRZ*.

(*ii*) *Jeżeli A jest formułą języka MRZ, to wyrażenia mające postać*: $\neg A$, $\Diamond A$, $\Box A$ *są formułami języka MRZ*.

(*iii*) *Jeżeli A, B są formułami języka MRZ, to wyrażenia mające postać*: $(A \to B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *są formułami języka MRZ.*

(*iv*) *Nie ma żadnych innych formuł języka MRZ poza zmiennymi zdaniowymi oraz tymi, które można utworzyć na mocy reguł* (*ii*) *oraz* (*iii*) *podanych wyżej*.

Niech $\oplus_1, ..., \oplus_n$ reprezentują spójniki/ operatory epistemiczne występujące w danym *ERZ*. Definicja pojęcia formuły języka *ERZ* podpada pod schemat:

(*i*) *Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka ERZ*.

(*ii*) *Jeżeli A jest formułą języka ERZ, to wyrażenia mające postać*: $\neg A, \oplus_1 A, ..., \oplus_n A$ *są formułami języka ERZ*.

(*iii*) *Jeżeli A, B są formułami języka ERZ, to wyrażenia mające postać*: $(A \rightarrow B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \leftrightarrow B)$ *są formułami języka ERZ.*

(*iv*) *Nie ma żadnych innych formuł języka ERZ poza zmiennymi zdaniowymi oraz tymi, które można utworzyć na mocy reguł* (*ii*) *oraz* (*iii*) *podanych wyżej*.

Przypomnijmy:

Aksjomat rachunkowozdaniowy *to formuła języka MRZ powstająca z tautologii KRZ poprzez konsekwentne zastąpienie (występujących w tej tautologii) zmiennych zdaniowych formułami języka MRZ.*

W *ERZ* również występują aksjomaty rachunkowozdaniowe. Definiujemy je oczywiście tak:

Aksjomat rachunkowozdaniowy *to formuła języka ERZ powstająca z tautologii KRZ poprzez konsekwentne zastąpienie (występujących w tej tautologii) zmiennych zdaniowych formułami języka ERZ.*

Przypomnijmy aksjomaty specyficzne rozważanych normalnych aletycznych rachunków zdań:

K: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

D: $\Box p \to \Diamond p$

T: $\Box p \to p$

B: $p \to \Box\Diamond p$

4: $\Box p \to \Box\Box p$

E: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

5: $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$

Wstawiając na miejsce operatora $\Box$ „główny” operator epistemiczny analizowany w danym *ERZ* (tj. **C**, **B**, **K**, ...), a na miejsce $\Diamond$ dualny do niego operator epistemiczny (np. **P**), otrzymujemy aksjomaty specyficzne budowanych *ERZ*; nazwy tak utworzonych formuł pozostają bez zmian.

W analizowanych poprzednio normalnych aletycznych rachunkach zdań mieliśmy następujące pierwotne reguły inferencyjne:

RO:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

RP:

$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:

$$\frac{A}{\Box A}$$

RZ:

$$\frac{B}{B[\neg\Box\neg A \,//\, \Diamond A]}$$

W rozważanych tutaj *ERZ* występują analogiczne reguły, z tym, że **RG** dotyczy (zwykle) „głównego” analizowanego operatora epistemicznego, natomiast **RZ** jest (zwykle) regułą wprowadzania operatora względem niego dualnego.

(Pragmatycznie) ważnymi regułami wtórnymi rozważanych *MRZ* były:

Reguła regularności:

RR:

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

Reguła ekstensjonalności:

RE:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

Ich odpowiedniki występują często (nawet jako reguły pierwotne!) w *ERZ*.

Przypomnijmy:

Normalne *MRZ* mają takie same zestawy (pierwotnych) reguł inferencyjnych (tj. regułami tymi są **RO**, **RP**, **RG** i **RZ**); wszystkie z nich są oparte na *KRZ* w tym sensie, że ich aksjomatami są m.in. aksjomaty rachunkowozdaniowe. Aksjomatem specyficznym każdego z nich jest aksjomat **K**. Systemy te różnią jednak się doborem aksjomatów specyficznych z następującej listy:

D: $\Box p \rightarrow \Diamond p$

T: $\Box p \rightarrow p$

B: $p \rightarrow \Box\Diamond p$

4: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

E: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

5: $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$

Przypomnijmy:

Rozważane normalne modalne aletyczne rachunki zdań możemy krótko scharakteryzować poprzez wymienienie aksjomatów specyficznych:

***K* = K**
***D* = KD**
***T* = KT**
***B* = KTB**
***S4* = KT4**
***S5* = KTE = KTB4**

W podobny sposób możemy zwięźle charakteryzować aksjomaty specyficzne poszczególnych *ERZ*.

Związki zawierania między zbiorami tez rozważanych normalnych aletycznych rachunków zdań – *a zatem również między wyznaczonymi/ formalizowanymi przez te rachunki modalnymi logikami zdań*! - przed-stawia następujący rysunek (strzałka $\downarrow$ symbolizuje inkluzję właściwą zbiorów tez):

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{K} \arrow[d] & \\
 & \boldsymbol{D} \arrow[d] & \\
 & \boldsymbol{T} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boldsymbol{B} \arrow[dr] & & \boldsymbol{S4} \arrow[dl] \\
 & \boldsymbol{S5} &
\end{tikzcd}$$

Zbiory tez rachunków ***B*** i ***S4*** krzyżują się.

Zdaniowa logika przekonań charakteryzujących się pewnością
KDE4
(znana też jako KD45)

Przypomnijmy:

Napis $\mathbf{C}(a, p)$ czytamy: „[podmiot] a jest całkowicie przekonany, że p”.

Mieliśmy m.in.

($\mathbf{C}_1$) $\quad \mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q) \rightarrow \mathbf{C}(a, p \wedge q)$

($\mathbf{C}_2$) $\quad \mathbf{C}(a, p) \rightarrow \neg\mathbf{C}(a, \neg p)$

$$\neg(\mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, \neg p))$$

(Def. P) $\quad \mathbf{P}(a, p) \leftrightarrow \neg\mathbf{C}(a, \neg p)$

($\mathbf{C}_3$) $\quad \mathbf{P}(a, p \wedge q) \rightarrow \mathbf{P}(a, p) \wedge \mathbf{P}(a, q)$

($\mathbf{C}_4$) $\quad \mathbf{C}(a, p \wedge q) \rightarrow \mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q)$

$$\mathbf{C}(a, p \wedge q) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q)$$

(C$_5$) $\mathbf{C}(a, p) \vee \mathbf{C}(a, q) \to \mathbf{C}(a, p \vee q)$

(C$_6$) $\mathbf{P}(a, p) \vee \mathbf{P}(a, q) \to \mathbf{P}(a, p \vee q)$

(C$_{10}$) $\mathbf{C}(a, p) \to \mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))$

(C$_{11}$) $\neg\mathbf{C}(a, p) \to \mathbf{C}(a, \neg\mathbf{C}(a, p))$

Ponadto obowiązywały reguły:

(C$_7$) $$\frac{p \leftrightarrow q}{\mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, q)}$$

(C$_8$) $$\frac{p \to q}{\mathbf{C}(a, p) \to \mathbf{C}(a, q)}$$

Teraz potraktujmy $\mathbf{C}$ jako spójnik/operator jednoargumentowy.

Budujemy zdaniowy rachunek przekonań **KDE4**.

Pojęcie formuły języka rachunku **KDE4** określamy standardowo (pamiętając, że mamy dwa operatory epistemiczne: $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{P}$).

Aksjomaty rachunkowozdaniowe rachunku **KDE4** definiujemy standardowo.

Aksjomatami specyficznymi rachunku **KDE4** są:

K: $\mathbf{C}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}q)$

D: $\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{P}p$

E: $\mathbf{P}p \rightarrow \mathbf{CP}p$

4: $\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CC}p$

Pierwotne reguły inferencyjne rachunku **KDE4** mają postać:

RO:
$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

RP:
$$\frac{A}{A\,[p_i\,/B]}$$

RG:
$$\frac{A}{\mathbf{C}A}$$

RZ:
$$\frac{B}{B[\neg\mathbf{C}\neg A\,//\,\mathbf{P}A]}$$

Pojęcia dowodu i tezy określamy w standardowy sposób.

Z analogicznych powodów, jak w rachunku ***K*** (zob. prezentację „Modalne rachunki zdań” cyklu „Logika II”) regułami wtórnymi w **KDE4** są m.in. epistemiczne odpowiedniki reguł regularności i ekstensjonalności:

RR:
$$\frac{A \to B}{\mathbf{C}A \to \mathbf{C}B}$$

RE:
$$\frac{A \leftrightarrow B}{\mathbf{C}A \leftrightarrow \mathbf{C}B}$$

Ponadto w **KDE4** mamy reguły wtórne oparte na *KRZ*.

Naszkicujemy teraz dowody odpowiedników niektórych spośród przedstawionych wyżej zależności.

Zaczniemy od:

$$\mathbf{C}(p \wedge q) \leftrightarrow \mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}q$$

Dowód przebiega analogicznie jak dowód tezy:

$$\Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$$

w rachunku ***K*** (zob. prezentację „Modalne rachunki zdań” cyklu „Logika II”). Odpowiednie fragmenty tego dowodu pokazują, jak udowodnić w **KDE4** następujące tezy

($\mathbf{C_1}$)* $\quad \mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}q \rightarrow \mathbf{C}(p \wedge q)$

($\mathbf{C_4}$)* $\quad \mathbf{C}(p \wedge q) \rightarrow \mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}q$

($\mathbf{C_2}$)* $\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{C}\neg p$

1. $\mathbf{C}p \to \mathbf{P}p$ (*aksjomat specyficzny*)
2. $\neg\mathbf{C}\neg p \to \neg\mathbf{C}\neg p$ (*aksjomat r-z*)
3. $\mathbf{P}p \to \neg\mathbf{C}\neg p$ (2, **RZ**)
4. $\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{C}\neg p$ (1, 3 **RSH**)

$\neg(\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}\neg p)$

1. $\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{C}\neg p$ (*teza* ($\mathbf{C_2}$)*)
2. $(\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{C}\neg p) \to (\neg\mathbf{C}p \vee \neg\mathbf{C}\neg p)$ (*aksjomat r-z*)
3. $(\neg\mathbf{C}p \vee \neg\mathbf{C}\neg p) \to \neg(\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}\neg p)$ (*aksjomat r-z*)
4. $(\mathbf{C}p \to \neg\mathbf{C}\neg p) \to \neg(\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}\neg p)$ (2, 3 **RSH**)
5. $\neg(\mathbf{C}p \wedge \mathbf{C}\neg p)$ (1, 4 **RO**)

(C_{11})* $\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$

1. $\neg\mathbf{C}\neg p \rightarrow \neg\mathbf{C}\neg p$ (*aksjomat r-z*)
2. $\neg\mathbf{C}\neg p \rightarrow \mathbf{P}p$ (1 **RZ**)
3. $\mathbf{P}p \rightarrow \mathbf{CP}p$ (*aksjomat specyficzny*)
4. $\neg\mathbf{C}\neg p \rightarrow \mathbf{CP}p$ (2, 3 **RSH**)
5. $\neg\mathbf{C}\neg\neg p \rightarrow \mathbf{CP}\neg p$ (4 **RP** $p/\neg p$)
6. $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (*aksjomat r-z*)
7. $\mathbf{C}\neg\neg p \leftrightarrow \mathbf{C}p$ (6 **RE**)
8. $(\mathbf{C}\neg\neg p \leftrightarrow \mathbf{C}p) \rightarrow (\neg\mathbf{C}p \rightarrow \neg\mathbf{C}\neg\neg p)$ (*aksjomat r-z*)
9. $\neg\mathbf{C}p \rightarrow \neg\mathbf{C}\neg\neg p$ (8, 7 **RO**)
10. $\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CP}\neg p$ (9, 5 **RSH**)
11. $(\mathbf{C}\neg\neg p \leftrightarrow \mathbf{C}p) \rightarrow (\neg\mathbf{C}\neg\neg p \rightarrow \neg\mathbf{C}p)$ (*aksjomat r-z*)
12. $\neg\mathbf{C}\neg\neg p \rightarrow \neg\mathbf{C}p$ (11, 7 **RO**)
13. $\mathbf{P}\neg p \rightarrow \neg\mathbf{C}p$ (12 **RZ**)
14. $\mathbf{CP}\neg p \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$ (13 **RR**)
15. $\neg\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$ (10, 14 **RSH**)

Formuła:

(*) $$\neg\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$$

ma taką samą strukturę jak formuła/ aksjomat **5** z *MRZ*:

$$\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$$

Jak widzieliśmy, formuła (*) jest dowodliwa w rozważanym rachunku; w dowodzie skorzystaliśmy tylko z jednego aksjomatu specyficznego, tj. aksjomatu:

$$\mathbf{P}p \to \mathbf{CP}p$$

Z drugiej strony, formułę

$$\mathbf{P}p \to \mathbf{CP}p$$

można łatwo wyprowadzić z formuły (*), *viz.*

1. $\neg\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$
2. $\neg\mathbf{C}\neg p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{C}\neg p$ (1 **RP** $p/\neg p$)
3. $\mathbf{P}p \to \mathbf{CP}p$ (2 **RZ**)

Dlatego też rachunek przekonań **KDE4** występuje również w literaturze przedmiotu pod nazwą **KD45.** Niezależnie od nazwy, jest on uważany za jedną ze standardowych logik przekonań. Inną – słabszą – logiką tego rodzaju jest **KE4**/ **K45**.

Patrząc od strony czysto formalnej, **KDE4** to prawie szacowny rachunek modalny ***S5***; prawie, albowiem zamiast odpowiednika aksjomatu **T** mamy w nim odpowiednik aksjomatu **D**.

To „prawie" – jak zobaczymy – czyni różnicę na poziomie nie tylko syntaktycznym, ale i semantycznym.

Zwróćmy też uwagę, że tezami rozważanych rachunków przekonań są:

$$\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\mathbf{C}p$$

$$\neg\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\neg\mathbf{C}p$$

Tezy te przypisują przekonaniom, odpowiednio, własności <u>pozytywnej i negatywnej introspekcji.</u>

Nawiasem mówiąc, teza/aksjomat:

$$\mathbf{C}p \to \mathbf{C}\mathbf{C}p$$

ma taką samą strukturę jak formuła/ aksjomat **4** z *MRZ*:

$$\Box p \to \Box\Box p$$

Semantyka typu Kripkego dla KDE4

Zbudujemy teraz semantykę typu Kripkego („semantykę światów możliwych”, *possible-world semantics*) dla logiki **KDE4**.

Na początek wykorzystamy aparaturę pojęciową wprowadzoną na kursie „Logika II”; następnie naszkicujemy pewne ujęcia alternatywne.

Gwoli przypomnienia:

Strukturą modelową n*azywamy dowolną parę uporządkowaną* <***W***, ***R***>, *gdzie **W** jest niepustym zbiorem*, *natomiast **R** jest binarną relacją w **W**.*

Gdy <***W***, ***R***> jest strukturą modelową, to zbiór ***W*** nazywamy zbiorem *światów możliwych* (*ang. possible worlds*), natomiast relację ***R*** nazywamy relacją *alternatywności* lub relacją *dostępności* (*ang. alternativeness*, *accessibility*).

Napis ***wRw**** czytamy „*świat **w*** jest alternatywny względem świata **w***" lub „*świat **w*** jest dostępny ze świata **w***".

*Niech <**W**, **R**> będzie strukturą modelową*. Wartościowaniem określonym na strukturze modelowej *<**W**, **R**> nazywamy dowolną funkcję **V**, której argumentami są formuły języka MRZ i elementy zbioru **W**, natomiast wartościami – prawda* **1** *i fałsz* **0**, *spełniającą następujące warunki:*

(1) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i, *dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:
$\mathbf{V}(p_i, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\mathbf{V}(p_i, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$;

(2) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:
$\mathbf{V}(\neg A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$;

(3) *dla dowolnych formuł A, B języka MRZ, dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:

- $\mathbf{V}(A \wedge B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *oraz* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(A \vee B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(A \rightarrow B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{V}(B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(A \leftrightarrow B, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w}) = \mathbf{V}(B, \mathbf{w})$;

(4) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$:

- $\mathbf{V}(\Diamond A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw istnieje* $\mathbf{w^*} \in \mathbf{W}$ *takie, że* $\mathbf{wRw^*}$ *oraz* $\mathbf{V}(A, \mathbf{w^*}) = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{V}(\Box A, \mathbf{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\mathbf{w^*} \in \mathbf{W}$ *takiego, że* $\mathbf{wRw^*}$:
$\mathbf{V}(A, \mathbf{w^*}) = \mathbf{1}$.

Modelem Kripkego *nazywamy trójkę uporządkowaną* <***W***, ***R***, ***V***>, *gdzie* <***W***, ***R***> *tworzy strukturę modelową*, *natomiast* ***V*** *jest wartościowaniem określonym na strukturze modelowej* <***W***, ***R***>.

Gdy <***W***, ***R***> jest strukturą modelową, a ***V*** jest wartościowaniem określonym na tej strukturze modelowej, to powiemy, że model Kripkego <***W***, ***R***, ***V***> jest modelem Kripkego *opartym na* strukturze modelowej <***W***, ***R***>.

***

W języku rachunku **KDE4** występują, zamiast modalności aletycznych ◊ i □, modalności epistemiczne **C** i **P**; podobnie jest w przypadku języka rachunku **KE4**/ **K45** i wielu innych zdaniowych logik przekonań (z tym, że zamiast symbolu **C** używa się często symbolu **B**, ponadto nie każda logika przekonań jest logiką przekonań charakteryzujących się pewnością).

Budując semantykę typu Kripkego dla *ERZ*, definicję pojęcia struktury modelowej pozostawiamy bez zmian.

Pojęcie modelu Kripkego opartego na strukturze modelowej definiujemy analogicznie jak w przypadku *MRZ.* Ta analogiczność dotyczy jednak budowy definicji, a nie jej treści, jako że modyfikacji ulega treść pojęcia wartościowania określonego na strukturze modelowej.

Będzie zatem tak (podświetlenie wskazuje różnice):

Niech $<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}>$ *będzie strukturą modelową*. Wartościowaniem określonym na strukturze modelowej $<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}>$ *nazywamy dowolną funkcję* **V**, *której argumentami są formuły języka ERZ i elementy zbioru* **W**, *natomiast wartościami – prawda* **1** *i fałsz* **0**, *spełniającą następujące warunki:*

(1) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i, *dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:
$\boldsymbol{V}(p_i, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\boldsymbol{V}(p_i, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$;

(2) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:
$\boldsymbol{V}(\neg A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$;

(3) *dla dowolnych formuł A, B języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:

- $\boldsymbol{V}(A \wedge B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *oraz* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \vee B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *lub* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \rightarrow B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ *lub* $\boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(A \leftrightarrow B, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{V}(B, \boldsymbol{w})$;

(4) *dla dowolnej formuły A języka MRZ, dla każdego* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$:

- $\boldsymbol{V}(\mathrm{P}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw istnieje* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takie, że* $\boldsymbol{wRw}^*$ *oraz* $\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$;
- $\boldsymbol{V}(\mathrm{C}A, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{wRw}^*$:
$\boldsymbol{V}(A, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1}$.

Podobnie jak w przypadku *MRZ*, przyjmujemy następujące definicje (mówiąc o modelach, mamy na myśli modele Kripkego):

Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w świecie ***w*** modelu <***W***, ***R***, ***V***> *wtw* ***V***(*A*, ***w***) = **1**.

Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w modelu <***W***, ***R***, ***V***> *wtw formuła A jest prawdziwa w każdym świecie modelu* <***W***, ***R***, ***V***>.

To, że formuła *A* jest prawdziwa w modelu ***M*** = <***W***, ***R***, ***V***>, zapisujemy:

$$\boldsymbol{M} \models A.$$

Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w strukturze modelowej <***W***, ***R***> *wtw formuła A jest prawdziwa w każdym modelu opartym na strukturze modelowej* <***W***, ***R***>.

Mówimy, że formuła A jest prawdziwa w (*niepustej*) klasie struktur modelowych Φ *wtw formuła A jest prawdziwa w każdej strukturze modelowej należącej do klasy* Φ.

Niech ***R*** będzie relacją binarną w ***W***.

R jest seryjna w ***W***	$\forall x \in \boldsymbol{W}\ \exists y \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}y)$
R jest zwrotna w ***W***	$\forall x \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}x)$
R jest symetryczna w ***W***	$\forall x, y \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}y \to y\boldsymbol{R}x)$
R jest przechodnia w ***W***	$\forall x, y, z \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}y \wedge y\boldsymbol{R}z \to x\boldsymbol{R}z)$
R jest euklidesowa w ***W***	$\forall x, y, z \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}y \wedge x\boldsymbol{R}z \to y\boldsymbol{R}z)$
R jest uniwersalna w ***W***	$\forall x, y \in \boldsymbol{W}\ (x\boldsymbol{R}y)$

Niech <***W***, ***R***> będzie strukturą modelową:

<***W***, ***R***> jest seryjna wtw ***R*** jest seryjna w ***W***.
<***W***, ***R***> jest zwrotna wtw ***R*** jest zwrotna w ***W***.
<***W***, ***R***> jest symetryczna wtw ***R*** jest symetryczna w ***W***.
<***W***, ***R***> jest przechodnia wtw ***R*** jest przechodnia w ***W***.
<***W***, ***R***> jest euklidesowa wtw ***R*** jest euklidesowa w ***W***.

Model <***W***, ***R***, ***V***> nazywamy seryjnym, gdy jest on oparty na seryjnej strukturze modelowej – i podobnie w pozostałych przypadkach (zwrotności, symetryczności, przechodniości i euklidesowości). Przypomnijmy związki między poszczególnymi aksjomatami specyficznymi normalnych *MRZ* a modelami Kripkego:

Formuła / aksjomat	*Relacja alternatywności w strukturze modelowej / modelu*
D: $\Box p \to \Diamond p$	*seryjna*
T: $\Box p \to p$	*zwrotna*
B: $p \to \Box\Diamond p$	*symetryczna*
4: $\Box p \to \Box\Box p$	*przechodnia*
E: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$	*euklidesowa*

Przypomnijmy też, względem jakich klas modeli Kripkego rachunki te są trafne i pełne zarazem:

Modalny rachunek zdań	*Modele Kripkego*
K = **K**	*wszystkie*
D = **KD**	*seryjne*
T = **KT**	*zwrotne*
B = **KTB**	*zarazem zwrotne i symetryczne*
S4 = **KT4**	*zarazem zwrotne i przechodnie*
S5 = **KTE** = **KTB4**	*zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie*

Biorąc to wszystko pod uwagę, nie jest chyba zaskoczeniem, że zachodzi:

Twierdzenie 1. *Formuła A jest tezą zdaniowego rachunku przekonań* **KDE4** *wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego opartym na strukturze modelowej, która jest zarazem seryjna, euklidesowa i przechodnia.*

Pamiętajmy, że prawdziwość w modelu to prawdziwość w każdym świecie tego modelu !

Trafność i pełność to miłe własności, nas jednak interesują również sprawy bardziej konkretne. Zapytajmy:

Co to znaczy, że formuła postaci $\mathrm{C}A$ *jest prawdziwa w świecie* ***w*** *modelu Kripkego opartego na strukturze modelowej, która to struktura modelowa jest zarazem seryjna, euklidesowa i przechodnia?*

Odpowiedź bardzo humanistyczna brzmi:

Samo A jest prawdą w każdym takim świecie (rozważanego modelu), który to świat jest alternatywny do ***w***.

No dobrze, ale co wiemy o relacji alternatywności?

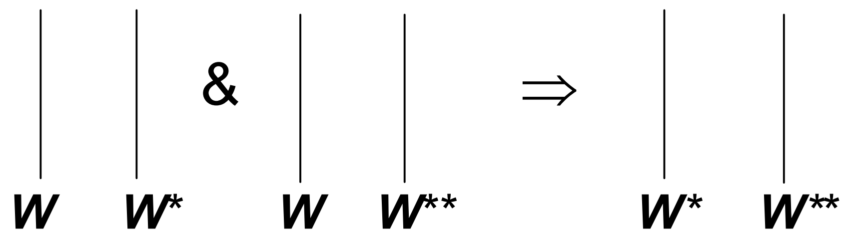
Po pierwsze, jest ona seryjna. Zatem na pewno istnieje co najmniej jeden świat ***w**** alternatywny do ***w***, w którym to świecie samo *A* jest prawdą.

Zauważmy, że nie znaczy to, że *A* jest prawdą w świecie ***w***. Na relację ***R*** nie nakładamy warunku zwrotności, a tylko warunek seryjności. Świat ***w*** nie musi być alternatywny względem samego siebie!

Gdy ***w*** to „nasz świat”, to prawdziwości formuły postaci $\mathbf{C}A$ w świecie ***w*** nie pociąga, że samo *A* jest prawdą w „naszym świecie” ***w***. Tak powinno być: przekonania, nawet charakteryzujące się pewnością, mogą być fałszywe.

Po drugie, relacja alternatywności jest przechodnia; zatem jeśli *A* jest prawdziwa w świecie ***w****** alternatywnym do ***w***, a świat ***w******** jest alternatywny do ***w******, to *A* jest też prawdziwa w świecie ***w********.

Po trzecie, relacja alternatywności jest euklidesowa, tak więc zbiór światów, w których *A* jest prawdziwa, jest zamknięty z uwagi na warunek, który można graficznie przedstawić tak:



Intuicyjnie rzecz biorąc, euklidesowość relacji epistemicznej alternatywności znaczy, że światy epistemicznie alternatywne względem pewnego świata są również wzajemnie epistemicznie alternatywne.

Dla rachunku **KE4**/ **K45** mamy:

Twierdzenie 2. *Formuła A jest tezą zdaniowego rachunku przekonań* **KE4**/ **K45** *wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego opartym na strukturze modelowej, która jest zarazem euklidesowa i przechodnia.*

Ciekawostka jest następująca: ponieważ od relacji alternatywności nie wymagamy teraz, aby była ona seryjna, może się zdarzyć, że formuła postaci **C***A* jest prawdziwa w jakimś świecie jakiegoś modelu (euklidesowego i przechodniego), chociaż samo *A* nie jest prawdą w żadnym świecie tego modelu. Będzie tak dla tych światów, dla których nie istnieją (w rozważanym modelu) żadne światy alternatywne. Na pocieszenie: w każdym takim świecie formuła postaci **P***A* będzie fałszywa.

Metoda tabel analitycznych dla KDE4/ KD45

Przedstawioną na kursie „Logika II” metodę tabel analitycznych dla (normalnych) *MRZ* można z łatwością zaadoptować do przypadku rachunku **KDE4.** Opis intuicyjny jest taki sam, więc go tu pominę, odsyłając do prezentacji „Tabele analityczne dla *MRZ*”. Podam tylko zestawienie reguł oraz kilka przykładów.

Reguły dla spójników KRZ

$r_{\neg\neg}$:

$$\frac{\neg\neg A,\ i}{A,\ i}$$

$r_{\wedge}$:

$$\frac{A \wedge B,\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ B,\ i \end{array}}$$

$r_{\neg\wedge}$:

$$\frac{\neg(A \wedge B),\ i}{\begin{array}{c|c} \neg A,\ i & \neg B,\ i \end{array}}$$

$r_{\vee}$:

$$\frac{A \vee B,\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & B,\ i \end{array}}$$

$r_{\neg\vee}$:

$$\frac{\neg(A \vee B),\ i}{\begin{array}{c} \neg A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

$r_{\rightarrow}$:

$$\frac{A \rightarrow B,\ i}{\begin{array}{c|c} \neg A,\ i & B,\ i \end{array}}$$

$r_{\neg\rightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B),\ i}{\begin{array}{c} A,\ i \\ \neg B,\ i \end{array}}$$

$r_{\leftrightarrow}$:

$$\frac{A \leftrightarrow B,\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ B,\ i & \neg B,\ i \end{array}}$$

$r_{\neg\leftrightarrow}$:

$$\frac{\neg(A \leftrightarrow B),\ i}{\begin{array}{c|c} A,\ i & \neg A,\ i \\ \neg B,\ i & B,\ i \end{array}}$$

Reguły dla $\mathbf{C}$ *oraz* $\mathbf{P}$

$r_{\neg\mathbf{C}}$:

$$\frac{\neg\mathbf{C}A,\ i}{\mathbf{P}\neg A,\ i}$$

$r_{\neg\mathbf{P}}$:

$$\frac{\neg\mathbf{P}A,\ i}{\mathbf{C}\neg A,\ i}$$

$r_{\mathbf{C}}$:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{C}A,\ i\\ iRj\end{array}}{A,\ j}$$

$r_{\mathbf{P}}$:

$$\frac{\mathbf{P}A,\ i}{\begin{array}{l}iRj\\ A,\ j\end{array}}$$

gdzie j jest ***nowym***[1] *liczebnikiem*

[1] Tzn. liczebnik *j* nie występuje wcześniej na tej gałęzi (budowanej tabeli analitycznej), na której stosujemy regułę wobec rozważanej formuły indeksowanej $\mathbf{P}A,\ i$.

Symbolem $\varphi(i)$ oznaczamy dowolną formułę – relacyjną lub indeksowaną – w której występuje liczebnik i.

r_D: (seryjność)

$$\frac{\varphi(i)}{iRj}$$

gdzie j jest nowym liczebnikiem na budowanej właśnie gałęzi tabeli oraz na tej gałęzi nie występuje wcześniej formuła relacyjna postaci iRk

r_E: (euklidesowość)

$$\frac{\begin{array}{c} iRj \\ iRk \end{array}}{jRk}$$

r_4: (przechodniość)

$$\frac{\begin{array}{c} iRj \\ jRk \end{array}}{iRk}$$

Przykład 1. Badamy, czy formuła $\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{C}p$ jest tezą rachunku **KDE4**.

$$\neg(\mathbf{CC}p \rightarrow \mathbf{C}p),\ 0$$
$$\mathbf{CC}p,\ 0$$
$$\neg\mathbf{C}p,\ 0$$
$$0R1$$
$$\mathbf{C}p,\ 1$$
$$\mathbf{P}\neg p,\ 0$$
$$0R2$$
$$\neg p,\ 2$$
$$1R2$$
$$p,\ 2$$

Odpowiedź: tak.

Przykład 2. Badamy, czy formuła $\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CC}p$ jest tezą rachunku **KDE4**.

$$\neg(\mathbf{C}p \rightarrow \mathbf{CC}p), 0$$
$$\mathbf{C}p, 0$$
$$\neg\mathbf{CC}p, 0$$
$$\mathbf{P}\neg\mathbf{C}p, 0$$
$$0R1$$
$$\neg\mathbf{C}p, 1$$
$$\mathbf{P}\neg p, 1$$
$$1R2$$
$$\neg p, 2$$
$$0R2$$
$$p, 2$$

Odpowiedź: tak.

Sama metoda tabel analitycznych dla **KDE4** nie jest jednak uniwersalną metodą rozstrzygania, czy dana formuła jest tezą rozważanego rachunku. Najogólniej rzecz ujmując, jest tak dlatego, że w pewnych sytuacjach powstaje tabela nieskończona zawierająca „pętle” (*loops*), co z kolei związane jest z tym, że **KDE4** jest tzw. logiką przechodnią – obowiązuje w niej odpowiednik formuły **4**. Więcej na ten temat – na wykładzie.

Pojęcie wynikania na gruncie logiki **KDE4** można zdefiniować tak:

Formuła A wynika na gruncie logiki **KDE4** *ze zbioru formuł X wtw dla każdego zarazem seryjnego, euklidesowego i przechodniego modelu **M** oraz dla każdego świata **w** tego modelu spełniony jest warunek:*

> (*) *jeśli każda formuła należąca do X jest prawdziwa w świecie **w**, to formuła A jest prawdziwa w świecie **w**.*

Mówiąc o formułach, mamy tu rzecz jasna na myśli formuły języka, w którym zbudowaliśmy rachunek **KDE4**.

Nieznacznie modyfikując przedstawioną metodę tabel analitycznych, uzyskujemy metodę wykazywania, że dana formuła wynika na gruncie **KDE4** z danego zbioru formuł. Modyfikacja ta przebiega tak samo jak dla *MRZ* – po szczegóły odsyłam do prezentacji „Tabele analityczne dla *MRZ*”.

Addendum 1: Semantyka Kripkego inaczej oraz semantyka Hintikki

Wykorzystane tu – a także na kursie „Logika II” – ujęcie semantyki Kripkego dla rozważanych *MRZ* i *ERZ* jest wzorowane na przedstawionym w klasycznej monografii: G. E.Hughes & M. J. Cresswell, ***A New Introduction to Modal Logic*** (Routledge, London/ New York 1996).

W literaturze przedmiotu mogą Państwo znaleźć ujęcia nieco odmienne.

Przykładowo, czasami nie wprowadza się odrębnego pojęcia struktury modelowej (ang. *frame*), a model Kripkego definiuje się jako trójkę uporządkowaną postaci:

$$<\boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{v}>$$

gdzie $\boldsymbol{W}$ jest niepustym zbiorem („możliwych światów”), $\boldsymbol{R}$ jest binarną relacja w $\boldsymbol{W}$ („relacją alternatywności/ dostępności”), natomiast $\boldsymbol{v}$ jest funkcją przyporządkowującą każdej parze $<p_i, \boldsymbol{w}>$, gdzie p_i jest zmienną zdaniową a $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, dokładnie jedną z wartości logicznych: **1**, **0**.

Dalej określa się pojęcie prawdziwości formuły A w świecie $\boldsymbol{w}$ modelu $\boldsymbol{M} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}, v \rangle$, symbolicznie $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} A$, tak[2]:

(1) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} p_i$ *wtw* $\boldsymbol{v}(p_i, \boldsymbol{w}) = \mathbf{1}$;

(2) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} \neg A$ *wtw* $\boldsymbol{M}$ *non* $\models^{\boldsymbol{w}} A$;

(3) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} (A \wedge B)$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} A$ *oraz* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} B$;

(4) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} (A \vee B)$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} A$ *lub* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} B$;

(5) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} (A \rightarrow B)$ *wtw* $\boldsymbol{M}$ *non* $\models^{\boldsymbol{w}} A$ *lub* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} B$;

(6) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} (A \leftrightarrow B)$ *wtw* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} A$ *zawsze i tylko, gdy* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} B$;

(7) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} \Diamond A$ *wtw istnieje* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takie, że* $\boldsymbol{wRw}^*$ *oraz* $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}^*} A$;

(8) $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} \Box A$ *wtw dla każdego* $\boldsymbol{w}^* \in \boldsymbol{W}$ *takiego, że* $\boldsymbol{wRw}^*$: $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}^*} A$.

Formuła A jest prawdziwa w modelu $\boldsymbol{M}$, symbolicznie $\boldsymbol{M} \models A$, wtw A jest prawdziwa w każdym świecie modelu $\boldsymbol{M}$.

W zależności od warunków nakładanych na $\boldsymbol{R}$ mówimy o modelach seryjnych, zwrotnych, symetrycznych, etc.

---

[2] Często stosuje się też notację następującą: $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{w} \models A$.

W innym wariancie pod pojęciem modelu Kripkego rozumie się trójkę uporządkowaną:

<***W***, ***R***, ***f***>

gdzie ***W*** jest niepustym zbiorem („możliwych światów”), ***R*** jest binarną relacja w ***W*** („relacją alternatywności/ dostępności”), natomiast ***f*** jest funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej p_i *pewien niepusty podzbiór zbioru* ***W****.* Intuicyjnie rzecz biorąc, do podzbioru tego należą te, i tylko te, możliwe światy, w których jest tak, że p_i.

Definicja pojęcia prawdziwości formuły w świecie ***w*** modelu ***M*** różni się od poprzednio podanej pierwszym warunkiem; teraz mamy:

(1)’ $\boldsymbol{M} \models^{\boldsymbol{w}} p_i$ *wtw* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{f}(p_i)$.

Takie ujęcie związane jest z rozumieniem sądów (ang. *propositions*) jako zbiorów światów możliwych. Więcej – na wykładzie.

Fiński logik Jaakko Hintikka to jeden z twórców współczesnej logiki epistemicznej; jego książkę pt. „Knowledge and Belief" (1962) uważa się powszechnie za jedną z najważniejszych pozycji w dziejach tej dyscypliny.

Semantyka użyta (i stworzona!) przez Hintikkę różni się od semantyki Kripkego.

Dla przykładu, rozważmy semantykę Hintikki dla rachunku **KDE4**; mówiąc dalej o formułach, będziemy mieli na myśli formuły języka, w których zbudowaliśmy **KDE4**.

Zbiorem modelowym (ang. *model set*) *nazywamy dowolny zbiór formuł* μ *spełniający następujące warunki*:

(1) *dla dowolnej zmiennej zdaniowej* p_i: *jeśli* $p_i \in \mu$, *to* '$\neg p_i$' $\notin \mu$;

(2) *jeśli* '$(A \wedge B)$' $\in \mu$, *to* $A \in \mu$ *oraz* $B \in \mu$;

(3) *jeśli* '$\neg(A \wedge B)$' $\in \mu$, *to* '$\neg A$' $\in \mu$ *lub* '$\neg B$' $\in \mu$;

(4) *jeśli* '$A \vee B$' $\in \mu$, *to* $A \in \mu$ *lub* $B \in \mu$;

(5) *jeśli* '$\neg(A \vee B)$' $\in \mu$, *to* '$\neg A$' $\in \mu$ *oraz* '$\neg B$' $\in \mu$;

(6) *jeśli* '$(A \rightarrow B)$' $\in \mu$, *to* '$\neg A$' $\in \mu$ *lub* $B \in \mu$;

(7) *jeśli* '$\neg(A \rightarrow B)$' $\in \mu$, to $A \in \mu$ *oraz* '$\neg B$' $\in \mu$;

(8) *jeśli* '$(A \leftrightarrow B)$' $\in \mu$, *to*: ($A \in \mu$ *oraz* $B \in \mu$) *lub* ('$\neg A$' $\in \mu$ *oraz* '$\neg B$' $\in \mu$).

(9) *jeśli* '$\neg(A \leftrightarrow B)$' $\in \mu$, *to*: ($A \in \mu$ *oraz* '$\neg B$' $\in \mu$) *lub* ('$\neg A$' $\in \mu$ *oraz* $B \in \mu$).

Zauważmy, że warunek (1) <u>nie</u> wymusza tego, aby do danego zbioru modelowego należała *każda* zmienna zdaniowa *lub* jej negacja.

Układ modelowy (ang. *model frame*) jest to para uporządkowana:

$$<\Omega, \boldsymbol{r}>$$

gdzie Ω jest (niepustą) rodziną zbiorów modelowych, a ***r*** jest binarną relacją w Ω. Podobnie jak w przypadku modeli Kripkego, ***r*** jest *relacją alternatywności* – ale tym razem między zbiorami modelowymi. Jednakże, intuicyjnie rzecz biorąc, *zbiór modelowy możemy potraktować jako cząstkowy opis „stanu świata"; wówczas zbiór modelowy* μ^* *pozostający w relacji alternatywności do zbioru modelowego* μ *dostarcza cząstkowego opisu „stanu świata" mogącego się zrealizować zamiast stanu opisywanego przez* μ*.*

Zauważmy, że „materiał", z którego „budujemy" układy modelowe jest czymś znacznie bardziej określonym, niż w przypadku modeli Kripkego – elementami zbiorów modelowych są <u>formuły</u>.

Niech $<\Omega, \boldsymbol{r}>$ będzie układem modelowym. Nakładamy następujące warunki:

(W$_{\mathbf{C}}$) *Jeżeli* '$\mathbf{C}A$' $\in \mu$ *oraz* $\mu \in \Omega$, *to dla każdego* $\mu^* \in \Omega$ *takiego, że* $\mu \boldsymbol{r} \mu^*$: $A \in \mu^*$;

(W$_{\mathbf{P}}$) *Jeżeli* '$\mathbf{P}A$' $\in \mu$ *oraz* $\mu \in \Omega$, *to dla pewnego* $\mu^* \in \Omega$ takiego, że $\mu \boldsymbol{r} \mu^*$: $A \in \mu^*$;

(W$_{\neg\mathbf{C}}$) *Jeżeli* '$\neg\mathbf{C}A$' $\in \mu$ *oraz* $\mu \in \Omega$, *to* '$\mathbf{P}\neg A$' $\in \mu$.

(W$_{\neg\mathbf{P}}$) *Jeżeli* '$\neg\mathbf{P}A$' $\in \mu$ *oraz* $\mu \in \Omega$, *to* '$\mathbf{C}\neg A$' $\in \mu$.

Można udowodnić, że zachodzi następująca zależność:

Niech $<\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}>$ *będzie układem modelowym takim, że* ***r*** *jest relacją zarazem seryjną, euklidesową i przechodnią w* $\boldsymbol{\Omega}$. *Formuła A jest tezą zdaniowego rachunku przekonań* **KDE4** *wtw dla każdego* $\mu \in \boldsymbol{\Omega}$ *nie jest tak, że* '$\neg A$' $\in \mu$.

W podobny sposób można budować semantykę typu Hintikki dla innych logik epistemicznych – a także innych logik modalnych w szerokim sensie tego terminu.

Dla porządku trzeba zaznaczyć, że przedstawione tu ujęcie semantyki Hintikki różni się paroma szczegółami od oryginału.

W języku polskim dostępny jest m.in. wybór tekstów Hintikki pt.”Eseje logiczno-filozoficzne”, wydany w 1992 r. przez Wydawnictwo Naukowe PWN w serii „Biblioteka Współczesnych Filozofów”.